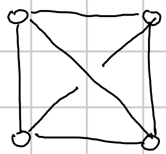
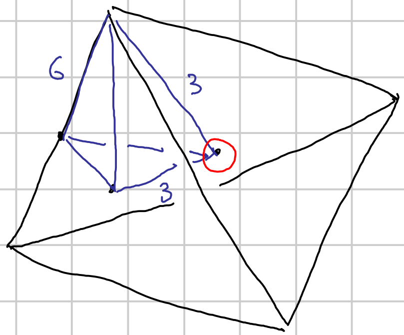
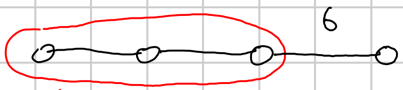
Geometria iperbolica 07-05

Rettifica: Se $P \subset \mathbb{H}^n$ è di Coxeter e F, G sono faccette disgiunte
$\langle g_F, g_G \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

T tetraedro ideale regolare. $\Gamma_T =$ 

Simplesso caratteristico S





$\mathrm{Symm}(T)$

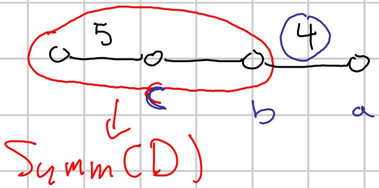
gruppo di Coxeter finito (σ_4'')

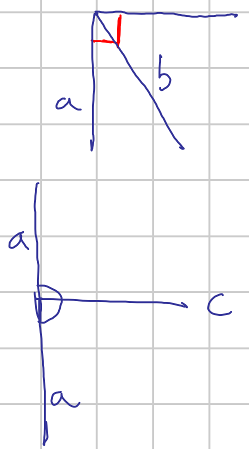
Riflettendo nelle facce corrispondenti a σ_4, ottengo proprio la tassellazione di T in copie di S.

- dim 3.
- D = dodecaedro

D ammette due realizzazioni come politopo di Coxeter regolare in $\mathbb{H}^3$.

- D ad angoli retti. Simplesso caratteristico:





- D con angoli diedrali $\frac{2\pi}{5}$ Simplesso caratteristico:

$$\circ \overset{5}{\text{———}} \circ \text{———} \circ \overset{5}{\text{———}} \circ$$

- Lo spazio di Seifert-Weber M è tassellato da una copia del dodecaedro regolare iperbolico con angoli $\frac{2\pi}{3}$

$\underset{\text{senza torsione}}{\pi_1(M)} < \circ \overset{5}{\text{———}} \circ \text{———} \circ \overset{5}{\text{———}} \circ$ di indice finito.

◦ Dim 4)

Compatto: 120-cella $\mathcal{C}$ (analogo 4-dimensionale del dodecaedro).

600 vertici, 120 facce dodecaedri. $\mathrm{Isom}(\mathcal{C}) = \circ\overset{5}{\text{——}}\circ\text{——}\circ\text{——}\circ$

ordine 14400

$\mathcal{C}$ ammette tre realizzazioni come politopo iperbolico in $\mathbb{H}^4$, con i seguenti angoli diedrali:

1) $\frac{2\pi}{5}$ $\longrightarrow$ simplesso caratt. $\circ\overset{5}{\text{——}}\circ\text{——}\circ\text{——}\circ\overset{5}{\text{——}}\circ$

2) $\frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$ $\circ\overset{5}{\text{——}}\circ\text{——}\circ\text{——}\circ\overset{4}{\text{——}}\circ$

3) $\frac{2\pi}{3} \longrightarrow$ $\circ \overset{5}{\text{——}} \circ \text{——} \circ \text{——} \circ \text{——} \circ$

- Non compatto: 24 celle, 24 vertici, 24 facce ottaedrali (autoduale).

  Simmetrie $\circ \text{——} \circ \overset{4}{\text{——}} \circ \text{——} \circ$ ordine 1152.

  Realizzazione con angoli $\frac{\pi}{2}$, simplesso caratteristico $\circ \text{——} \circ \overset{4}{\text{——}} \circ \text{——} \circ \overset{4}{\text{——}} \circ$ ideale

Oss: Sia $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ di Coxeter

2) I sottogruppi finiti (a meno di coniugio) generati dalle riflessioni nelle faccette adiacenti a una faccia (di qualsiasi dimensione).

I sottogruppi finiti massimali sono generati da riflessioni in facce di codimensione massima (riflessioni in facce adiacenti a vertici iperbolici o a spigoli ideali).

$\rightsquigarrow$ In Γ esistono un # finito di classi di coniugio di sottogruppi finiti massimali

Strategia per costruire una varietà:

Dato Γ gruppo di Coxeter, cerchiamo un omomorfismo

$\varphi : \Gamma \longrightarrow F$ tale che $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è senza torsione

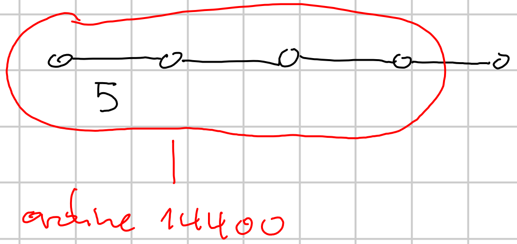
gruppo finito

↳ È sufficiente verificare che i sottogruppi finiti massimali siano mappati iniettivamente da φ).

Oss: In tal caso il rivestimento $\mathbb{H}^n / \mathrm{Ker}\,\varphi \longrightarrow P$ è regolare

politopo di Coxeter

In generale non si riesce:



$\xrightarrow{\varphi} F$ t.c. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ non ha torsione.

Allora F ha almeno ordine 14400

- Facile nel caso di politopi ad angoli retti.

<u>Colorazioni</u>

Sia P un politopo ad angoli retti. Una <u>colorazione</u> di P è il dato di:

uno spazio vettoriale V su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\left(V \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m\right)$ e, per ogni faccetta

F di P, di un colore $c(F) \in V$.

Def: La colorazione è *propria* se verifica le seguenti condizioni:

- $\forall$ vertice finito di P ($v \in \mathbb{H}^n$), i colori $c(F_1), \dots, c(F_n)$ delle n faccette di P adiacenti a v sono linearmente indipendenti in V.
- $\forall$ spigolo ideale e, i colori $c(F_1), \dots, c(F_{n-1})$ delle $(n-1)$-faccette di P adiacenti a e sono lin. indip. in V.

Oss: 1) Una colorazione definisce un omomorfismo φ del gruppo di Coxeter ad angoli retti $\Gamma \xrightarrow{\varphi} V$.

- I generatori di Γ sono in corr. 1-1 con le faccette di p).

$\varphi: (g_F) = C_F \in V \qquad \varphi(g_F^2) = 2 \cdot C_F = \underline{0} \in V.$

Se F_1 e F_2 si $\cap$ $\Rightarrow$ $g_{F_1} g_{F_2} g_{F_1} g_{F_2} = 1 \in \Gamma$

$\varphi(g_{F_1} g_{F_2} g_{F_1} g_{F_2}) = 2(C_{F_1} + C_{F_2}) = \underline{0} \in V$

2) Ker φ è senza torsione perché la colorazione è propria

I sottogruppi finiti massimali corrispondono alle riflessioni nelle facce adiacenti a vertici iperbolici $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

e agli spigoli ideali $\left(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}\right)^{n-1}$. Poiché la colorazione è propria questi gruppi vengono mappati iniettivamente da φ.

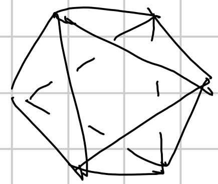
Oss. 3) La tassellazione della varietà $M = \frac{\mathbb{H}^n}{\ker\varphi}$ è esplicita:

a) Prendiamo $|V| = 2^m$ copie di P in corr. 1-1 con V.

b) Per ogni copia P_v di P $(v \in V)$, per ogni faccetta F di P, identifichiamo P_v a $P_{v+c(F)}$ lungo la faccetta F, usando l'identità.

Esempio:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_1 \arrow[r, leftrightarrow, "B"] \arrow[d, leftrightarrow, "N"'] & \mathcal{O}_2 \arrow[d, leftrightarrow, "N"] \\ \mathcal{O}_3 \arrow[r, leftrightarrow, "B"] & \mathcal{O}_4 \end{tikzcd}$$



Checkerboard coloring con colori B e N.

$$V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

Se F è colorata con B, $c(F) = (1,0)$

" " " " con N, $c(F) = (0,1)$

Esempio banale: Se f è il # di faccette di P, possiamo prendere

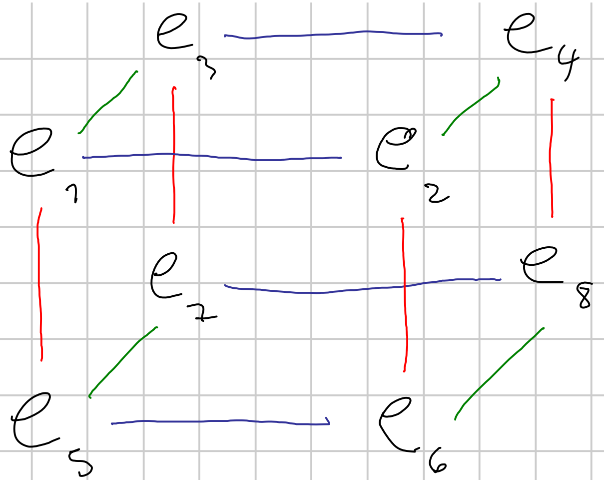
$V = \left(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}\right)^{8}$ e colorare ogni faccetta F con il corrispondente vettore della base canonica.

- Spesso di può fare di meglio:

(R, G, B)

1) La 24-cella $\mathcal{C}$ ammette una colorazione con 3-colori, tale che: $\forall$ spigolo s, i 3 ottaedri adiacenti a s hanno colori distinti. $V = \left(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}\right)^{3}$

$\Rightarrow$ Otteniamo una varietà tassellata da 8 copie della 24-cella.



- La 120-cella ammette una 5-colorazione intera in $\{1,2,3,4,5\}$. La corrispondente colorazione in $V = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^5$ è propria. $\Rightarrow$ 4 varietà iperbolica chiusa tassellata da 32 copie della 120-cella ad angoli retti.

- Costruzioni così permettono di costruire esempi espliciti fino a dim 8.

Teo: $\forall\, n>0$ esistono (tante) varietà iperboliche complete e di volume finito di dim. n (compatte e non compatte).

Def: Dati H_1, H_2 sottogruppi di G, questi si dicono <u>commensurabili</u> se $H_1 \cap H_2$ ha indice finito in H_1 e H_2

H_1, H_2 si dicono <u>commensurabili in senso largo</u> se

$\exists\, g \in G$ t.c. H_1 è commensurabile a gH_2g^{-1}?

Def: Due varietà iperboliche $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$, e $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ sono commensurabili se Γ_1 e Γ_2 sono commen. in senso largo come sottogruppi di $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$

In tal caso:

$$\begin{tikzcd} & M \text{ hyp.} \arrow[dl, "\text{finito}"'] \arrow[dr, "\text{finito}"] & \\ M_1 & & M_2 \end{tikzcd}$$

Oss: La commensurabilità è una relazione di equivalenza.

Teo: In ogni dimensione esistono infinite classi di commensurabilità di varietà iperboliche complete di volume finito (sia cpt. che non cpt.).

Sketch: $\boxed{1}$ Esistono infinite classi di comm. di reticoli in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$

sgr. discreto Γ t.c. $\mathbb{H}^n/\Gamma$ ha volume finito.

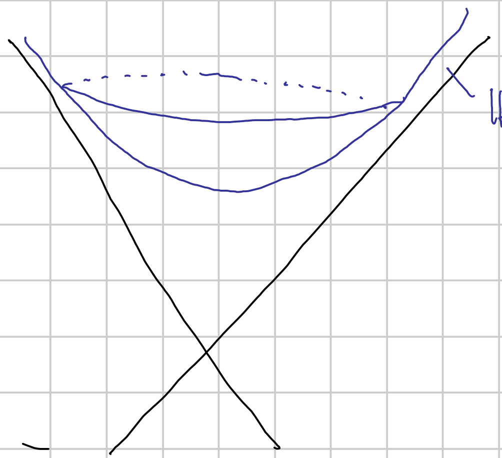
(2) Dato Γ reticolo in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, per il lemma di Selberg, $\exists$ $\Gamma' \leq_f \Gamma$ senza torsione e $M = \mathbb{H}^n/\Gamma'$ è iperbolica cplt. di vol. $<+\infty$.

Reticoli aritmetici in spazi simmetrici

$$(\mathbb{H}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)) \rightsquigarrow$$

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = O^+(n,1) < O(n,1)$$

$$O^+(n,1) = PO(n,1) = O(n,1)/_{-I}$$



$$\mathbb{H}^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1,\ x_0 > 0\}$$

- $\mathbb{H}^n$ è uno spazio simmetrico. ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ anche).

Def: Uno spazio simmetrico è una varietà Riemanniana M, omogenea ($Isom(M)$ agisce transitivamente su M) e tale che $\forall p \in M$, $\exists$ un'isometria involutiva di M (inversione in p) che fissa p e agisce come $-Id$ su T_pM.

- $Isom(\mathbb{H}^n)$ è un gruppo di Lie lineare semisemplice.

Def: Un gruppo di Lie (lineare) è un sottogruppo G chiuso di $GL(n,\mathbb{R})$.

(Per teo Cartan G è effettivamente una varietà).

Def: Un gruppo di Lie G è semplice se non è abeliano e non contiene $\mathbb{R}$ e S^1 non sono semplici
sottogruppi connessi chiusi normali
propri e non banali.

Def: G_1 è isogeno a G_2 se esistono:

1) Sottogruppi $G_1' < G_1$ e $G_2' < G_2$ di indice finito
2) Sottogruppi normali finiti $N_1 < G_1'$ e $N_2 < G_2'$ tali

G_1'/N_1 è isomorfo a G_2'/N_2

Def: G gr. di Lie lineare è <u>semisemplice</u> se G è isogeno a un prodotto diretto di gruppi semplici.

Oss. $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ è semisemplice, infatti $O^+(n,1) \supset O^+_0(n,1) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$

e $O^+_0(n,1)$ è semplice

Corrispondenza tra spazi simmetrici e gruppi di Lie.

$\rightarrow$ Dato M spazio simmetrico connesso, questo produce:

1) $G = \mathrm{Isom}(M)_0$ – c.c. di id in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$

è un gruppo di Lie che agisce transitivamente su M. (Myers - Steenrod).

2) $K := \mathrm{Stab}_G(p) < G$ $\quad (p \in M)$ $\quad K$ è univocamente det. a meno di coniugio.

K è un sottogruppo compatto di G (è un sgr. chiuso in $SO(n)$ che agisce su T_pM).
ed è un gruppo di Lie.

M è diffeo a G/K = {classi laterali sx di K in G}.

L'azione di G su G/K induce l'azione di G su M.

Il punto p corrisponde proprio a K.

3) L'inversione in p: $s_p: M \to M$ induce

$\sigma: G \to G$ tramite $\sigma(g) = s \circ g \circ s$ è un automorfismo involutivo.

Se $C(\sigma) = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$ notiamo che $C(\sigma)$ è un gruppo di Lie

e $\mathring{C}(\sigma) \underline{\leq} K < C(\sigma)$, per cui K è un sottogruppo aperto di $C(\sigma)$

$\Downarrow$ K aperto.

M simmetrico $\rightsquigarrow$ (G, K, σ)

G: gr. di Lie

K: sgr. compatto di G

σ: automorfismo involutivo t.c. K è aperto in $C_G(\sigma)$